6.1 Základné pojmy

Prvou známou úlohou, ktorú možno zaradiť do variačného počtu bola tzv. Didónina úloha. Staroveká legenda hovorí o vládkyni Didó, ktorá prenasledovaná vo svojej krajine odišla so svojimi najvernejšími do severnej Afriky a tamojšieho vládcu požiadala o pozemok, ktorý by mohla ohraničiť kožou z vola. Keď bolo vyhovené jej „smiešnej žiadosti“ porezala kožu na tenké povrazy, ktoré zviazala a takto ohraničila územie pri mori, na ktorom vybudovala v staroveku slávne mesto Kartágo.

Táto úloha inšpirovala už antických matematikov k úvahám ako nájsť optimálne riešenie danej úlohy. Za zakladateľa variačného počtu je považovaný Leonard Euler (1707-1783), inšpirovala tiež Lagrangea (1736-1813) ako aj iných matematikov.

Definícia 6.1.1 *Nech M je množina reálnych funkcií definovaných na $\langle a,b\rangle$. Nech každej funkcii $x = x(t)$ z nejakej množiny M je priradené práve jedno reálne číslo $v[x(t)]$. Potom hovoríme, že na množine M je definovaný funkcionál $v[x(t)]$. Množina M nazývame jeho definičným oborom alebo množinou prípustných hodnôt funkcionálu v.*

Príklad 6.1.1 *Nech M je množina všetkých spojito diferencovateľných nezáporných funkcií $x(t)$ na intervale $\langle a,b\rangle$, ktoré splňujú podmienky $x(a) = 0, x(b) = 0$. Nech*

$$l[x(t)] = \int_a^b \sqrt{1 + x'^2(t)}dt, \quad P[x(t)] = \int_a^b x(t)dt,$$

potom $l[x(t)]$ je funkcionál pre dĺžky kriviek na M. Každej funkcii $x(t)$ funkcionál $l[x(t)]$priradí reálne číslo, ktoré je dĺžkou krivky $x = x(t)$ medzi dvoma bodmi $(a,0),(b,0)$. Funkcionál $P[x(t)]$ udáva obsah oblasti ohraničenej krivkou $x = x(t)$ a priamkou $x = 0$ na intervale $\langle a,b\rangle$.

Didónina úloha vedie k určeniu krivky $x = x(t)$, $t \in \langle a,b\rangle$ so spojitou deriváciou $x'(t)$ pre $t \in \langle a,b\rangle$, pre ktorú bude mať funkcionál $P[x(t)]$ maximálnu hodnotu, pri danej hodnote funkcionálu $l[x(t)] = K$, kde K je reálna kladná konštanta.

Pri riešení úloh v teórii regulácie (ako aj inde) sa stretávame s problémom nájdenia, v určitom zmysle, najvýhodnejšieho, optimálneho režimu práce určitého systému. Podobné úlohy sme riešili v diferenciálnom počte, kde sme riešili úlohy vedúce na extrémy reálnych funkcií.

Metódy hľadania extrémov funkcionálov sú podobné ako pri hľadaní extrémov reálnych funkcií. Pri zavedení nových pojmov si pripomenieme podobné pojmy z reálnej funkcie jednej premennej.

Predpokladajme, že f je funkciou premennej t. Prírastok Δt argumentu t funkcie $f(t)$ sa nazýva rozdiel medzi dvoma hodnotami tejto premennej $\Delta t = t - t_1$. Ak t - je nezávislé premenná, potom diferenciál t je totožný s prírastkom , t.j. $\Delta t = dt$.

Prírastkom alebo variáciou δx argumentu $x(t)$ funkcionálu $v[x(t)]$ sa nazýva rozdiel medzi dvoma funkciami $\delta x = x(t) - x_1(t)$. Pritom predpokladáme, že $x(t)$ je ľubovoľná funkcia z určitej triedy funkcií z množiny M .

Funkcia f je spojitá v bode t_0, ak malej zmene premennej t_0 odpovedá malá zmena hodnoty funkcie f .

Funkcionál $v[x(t)]$ definovaný na M je spojitý na $x_0(t) \in M$, ak malej zmene $x_0(t) \in M$ odpovedá malá zmena hodnoty funkcionálu $v[x(t)]$.

Vidíme, že je potrebné vysvetliť, čo budeme rozumieť pod pojmom *malá zmena* argumentu $x(t)$ funkcionálu $v[x(t)]$ alebo aké krivky budeme pokladať za *blízke*.

Krivky $x = x(t)$ a $x = x_1(t)$ sú blízke v zmysle blízkosti k - tého rádu ak sú malé rozdiely $|x(t) - x_1(t)|, |x'(t) - x_1'(t)|, \ldots, |x^{(k)}(t) - x_1^{(k)}(t)|$.

Uvedieme presnejšiu definíciu spojitosti funkcionálu.

Definícia 6.1.2 *Funkcionál* $v[x(t)]$ *definovaný na* M *je spojitý pre* $x = x_0(t) \in M$ *v zmysle blízkosti* k *- tého rádu, ak pre ľubovoľné kladné* ε *, existuje* $\delta > 0$ *také, že pre všetky* $x(t) \in M$ *pre ktoré je*

$$|x(t) - x_0(t)| < \delta, |x'(t) - x_0'(t)| < \delta, \ldots, |x^{(k)}(t) - x_0^{(k)}(t)| < \delta$$

je splnená nerovnosť

$$|v[x(t)] - v[x_0(t)]| < \varepsilon .$$

Hovoríme, že funkcia $l(t)$ definovaná na A je lineárna, ak pre každé $t_1, t_2 \in A$ a ľubovoľné konštanty c_1, c_2 platí: $l(c_1 t_1 + c_2 t_2) = c_1 l(t_1) + c_2 l(t_2)$.

Definícia 6.1.3 *Hovoríme, že funkcionál* $L[x(t)]$ *definovaný na* M *je lineárny, ak pre každé* $x_1, x_2 \in M$ *a ľubovoľné konštanty* c_1, c_2 *platí:*

$$L(c_1[x_1(t)] + c_2[x_2(t)]) = c_1 L[x_1(t)] + c_2 L[x_2(t)].$$

Ak **prírastok funkcionálu** $\Delta v = v[x(t) + \delta x] - v[x(t)]$ možno vyjadriť v tvare

$$\Delta v = L[x(t), \delta x] + \omega[x(t), \delta x] \max|\delta x|,$$

kde $L[x(t), \delta x]$ je lineárna funkcia vzhľadom na $\delta x, \max|\delta x|$ je maximálna hodnota $|\delta x|$ a $\omega[x(t), \delta x] \to 0$ pre $\max|\delta x| \to 0$.

Definícia 6.1.4 *Hlavnú časť prírastku funkcionálu* $L[x(t), \delta x]$ *nazývame* ***prvou variáciou funkcionálu*** $v[x(t)]$ *a označujeme ho* δv.

Diferenciál funkcie f môžeme určiť aj iným spôsobom. Uvažujme hodnoty funkcie $f(t + \alpha\Delta t)$ pri daných hodnotách $t, \Delta t$ a premennom parametri α. Potom

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t + \alpha\Delta t)|_{\alpha=0} = f'(t + \alpha\Delta t)\Delta t|_{\alpha=0} = f'(t)\Delta t = df(t).$$

Podobne môžeme vypočítať tiež diferenciál funkcie viac premenných

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_i} \Delta t_i = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(t_1 + \alpha\Delta t_1, \ldots, t_n + \alpha\Delta t_n)|_{\alpha=0} .$$

Analogicky môžeme definovať variáciu δv funkcionálu $v[x(t)]$ predpisom

$$\delta v = \frac{\partial}{\partial \alpha} v[x(t) + \alpha\delta x]|_{\alpha=0} .$$

Definícia 6.1.5 *Nech funkcionál* $v[x(t)]$ *je definovaný na* M. *Hovoríme, že funkcionál* $v[x(t)]$ *nadobúda lokálne maximum (lokálne minimum) na krivke* $x = x_0(t) \in M$, *ak existuje otvorená množina* $D \subset M$ *obsahujúca* $x_0(t)$ *taká, že*

$$\Delta v = v[x(t) - x_0(t)] \leq 0 \quad (\geq 0)$$

pre všetky $x(t) \in D$.

Ak diferencovateľná funkcia f nadobúda lokálny extrém v bode $t_0 \in (a, b)$, potom je $df(t_0) = 0$.

.

Veta 6.1.1 (Nutná podmienka pre extrémy.) *Nech* $v : D \to R^1$ *je daný funkcionál,* $A \subseteq V$, *kde* V *je normovaný lineárny priestor. Ak funkcionál* $v[x(t)]$ *nadobúda lokálne maximum alebo lokálne minimum pre* $x_0(t)$ *a ak existuje na tejto krivke jeho prvá variácia, potom* $\delta v = 0$ *na krivke* $x = x_0(t)$.

Hovoríme, že funkcionál v je stacionárny na $x_0(t) \in D$.